**2023—2024学年第一学期高三质量检测**

**高三数学**

**2024.01**

**注意事项：**

**1.答卷前，考生务必将自己的姓名､考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.**

**2.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.**

**如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.**

**3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.**

**一､选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合,，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】分别求解两个集合，再根据补集和并集的定义，即可求解.

【详解】，得，所以，

函数中，，即，所以，

，所以.

故选：B

2. 若是方程的一个虚数根，则（ ）

A. 0 B. -1 C.  D. -1或

【答案】A

【解析】

【分析】求出方程的虚数根，再代入计算即得.

【详解】方程化为：，依题意，或，

显然，又，即，

所以.

故选：A

3. 已知的两个顶点的坐标分别是，且所在直线的斜率之积等于，则（ ）

A. 当时，顶点的轨迹是焦点在轴上的椭圆，并除去两点

B. 当时，顶点的轨迹是焦点在轴上的椭圆，并除去两点

C. 当时，顶点的轨迹是焦点在轴上的双曲线，并除去两点

D. 当时，顶点的轨迹是焦点在轴上的双曲线，并除去两点

【答案】C

【解析】

【分析】由题意得，分别令、即可判断.

【详解】由题意不妨设，则，即，

当时，顶点的轨迹是以原点为圆心的单位圆，并除去两点，故AB错误；

当时，顶点的轨迹是焦点在轴上的双曲线，并除去两点，故C正确，D错误.

故选：C.

4. 已知圆，圆，则两圆的公切线条数为（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】由两圆的位置关系即可确定公切线的条数.

【详解】由题意圆是以为圆心1为半径的圆；

即是以为圆心3为半径的圆；

圆心距满足，所以两圆相离，

所以两圆的公切线条数为4.

故选：D.

5. 已知，则的零点之和为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】令，由二倍角余弦公式和辅助角公式化简可得，则或，结合，即可得出答案.

【详解】由，

则，所以，

即，

所以或，

解得：或，

因为，所以，或，

所以的零点之和为，

故选：C.

6. 翼云机场将于2025年通航，初期将开通向北至沈阳､哈尔滨；向南至昆明､深圳；向西至兰州､银川的六条航线.甲､乙､丙､丁､戊､已6人各选择一条不同航线体验.已知甲不去沈阳､哈尔滨，乙和丙乘坐同一方向的航班.则不同的体验方案有（ ）

A. 56种 B. 72种 C. 96种 D. 144种

【答案】C

【解析】

【分析】通过分别分析甲，乙和丙的方案，即可得出总共的不同的体验方案数量.

【详解】由题意，

共6个城市，3个方向，

甲不去沈阳､哈尔滨，有种方案，

乙和丙乘坐同一方向的航班，有种方案，

剩余3人有种方案，

故不同的体验方案有：，

故选：C.

7. 已知正四棱台的上下底面边长分别为1和3，高为2.用一个平行于底面的截面截棱台，若截得的两部分几何体体积相等，则截面与上底面的距离为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】延长正四棱台的棱交于一点，由三角形相似，求出，再由棱台的体积公式求出截面截得棱台的上部分几何体的体积，设截面与上底面的距离为，正方形的边长为，由三角形相似，得到，结合即可求出.

【详解】延长正四棱台的棱交于点，

如图所示，截面平行于底面

设上底面的面积为，下底面的面积为，截面的面积为，

正四棱台的体积为，平行于底面的截面截棱台，截得的上部分几何体体积为，则，

上底面的中心为，下底面的中心为，连结，

则上底面，下底面，正四棱台的高为，

设截面与上底面的距离为，正方形的边长为，

，，

由得，，由得，，

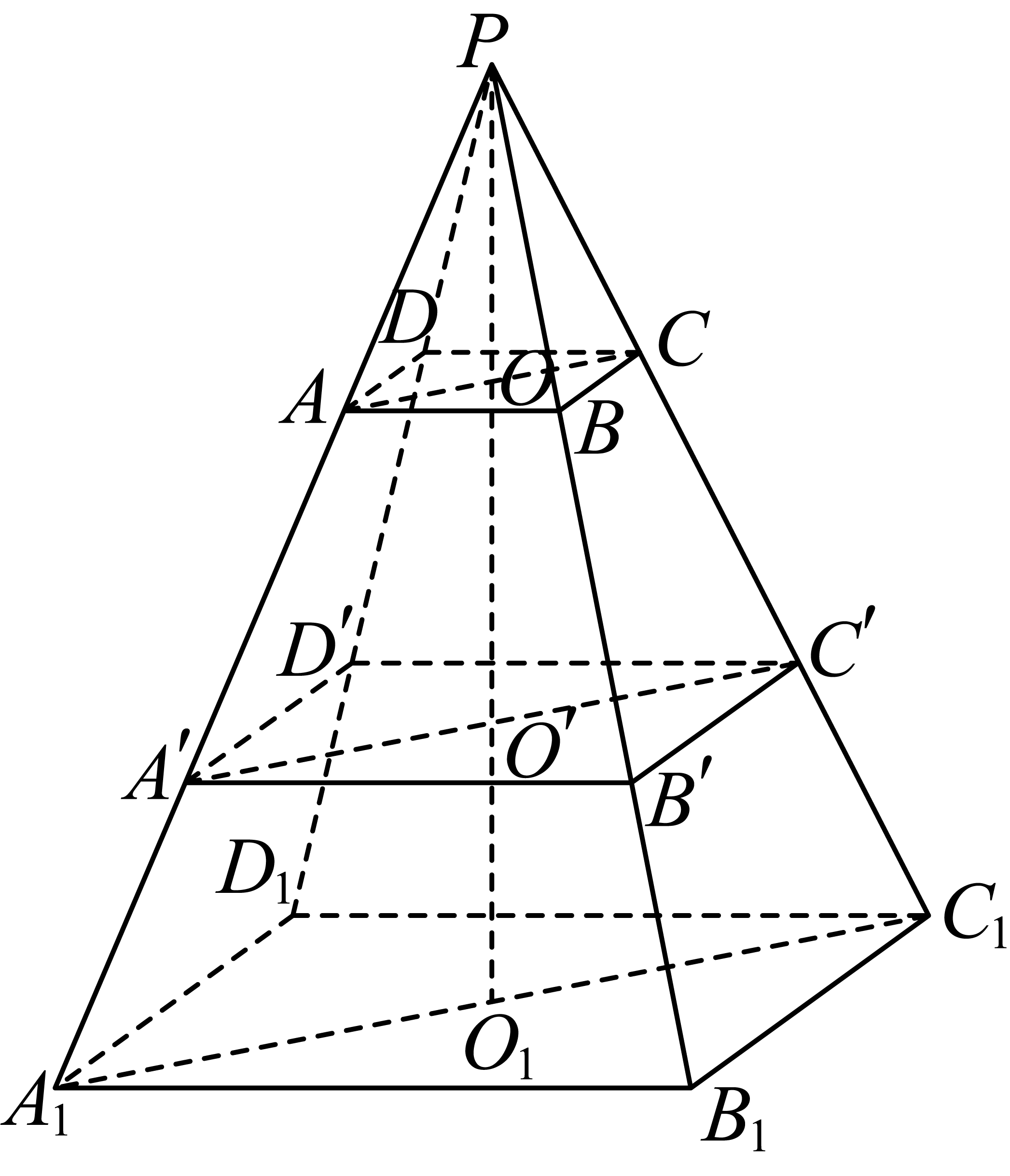
又，所以，

同理可得，得，所以，①

又因为，②

由①②得，，，所以截面与上底面的距离为.

故选：D.



8. 斜率为的直线分别与轴，轴交于两点，且与椭圆，在第一象限交于两点，且，则该椭圆的离心率为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】设，，根据题意得到，即，设直线的方程为，得，得，进而得，再根据求解即得.

【详解】设，，线段*AB*的中点为*E*，

由，，两式相减可得，

即，又由，，则，

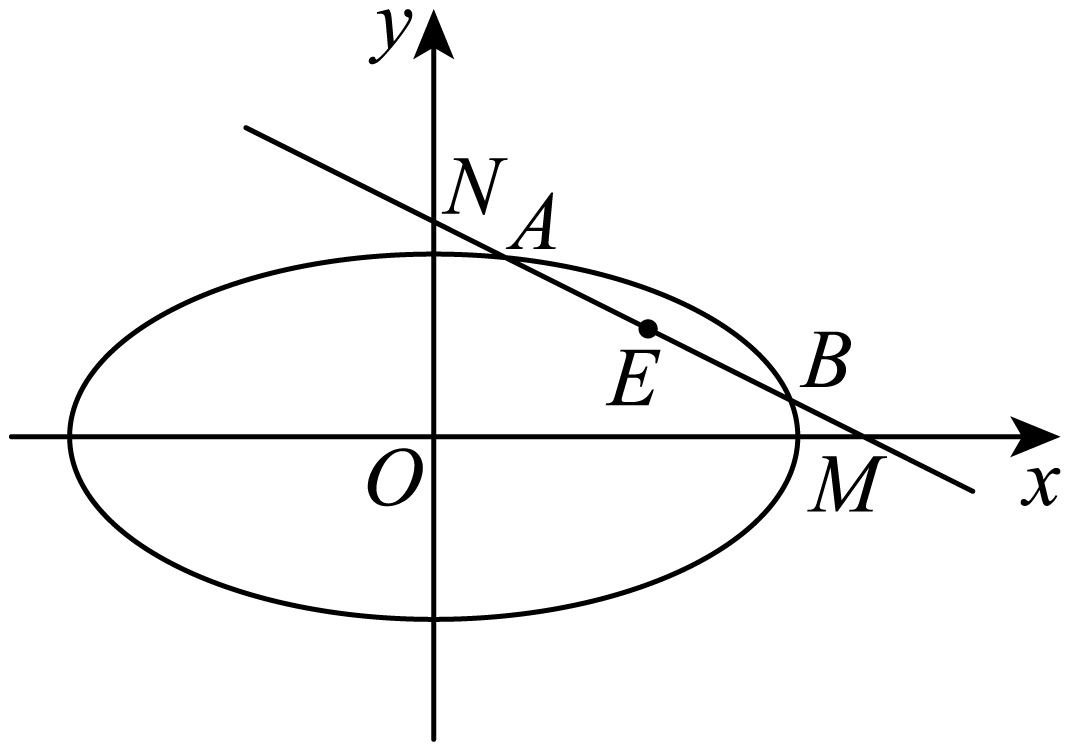
设直线的方程为，（），可得，，

又，所以线段*AB*的中点为*E*也就是线段MN的中点，得，

所以，所以，即，

得，

故选：A



**二､多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 一组数据满足，若去掉后组成一组新数据.则新数据与原数据相比（ ）

A. 极差变小 B. 平均数变大 C. 方差变小 D. 第25百分位数变小

【答案】AC

【解析】

【分析】根据极差，平均数，方差与百分位数的定义计算出去掉前后的相关数据，比较后得到答案.

【详解】由于，

故，，……，，，

A选项，原来的极差为，去掉后，极差为，极差变小，A正确；

B选项，原来的平均数为，

去掉后的平均数为，平均数不变，B错误；

C选项，原来方差为，

去掉后的方差为，

方差变小，C正确；

D选项，，从小到大排列，选第3个数作为第25百分位数，即，

，故从小到大排列，选择第3个数作为第25百分位数，即，

由于，第25百分位数变大，D错误.

故选：AC

10. 设，，则（ ）

A. 

B. 

C. 若，则

D. 在上的投影向量为

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据向量的坐标运算计算验证各选项是否正确.

【详解】因为：，所以，故A错误；

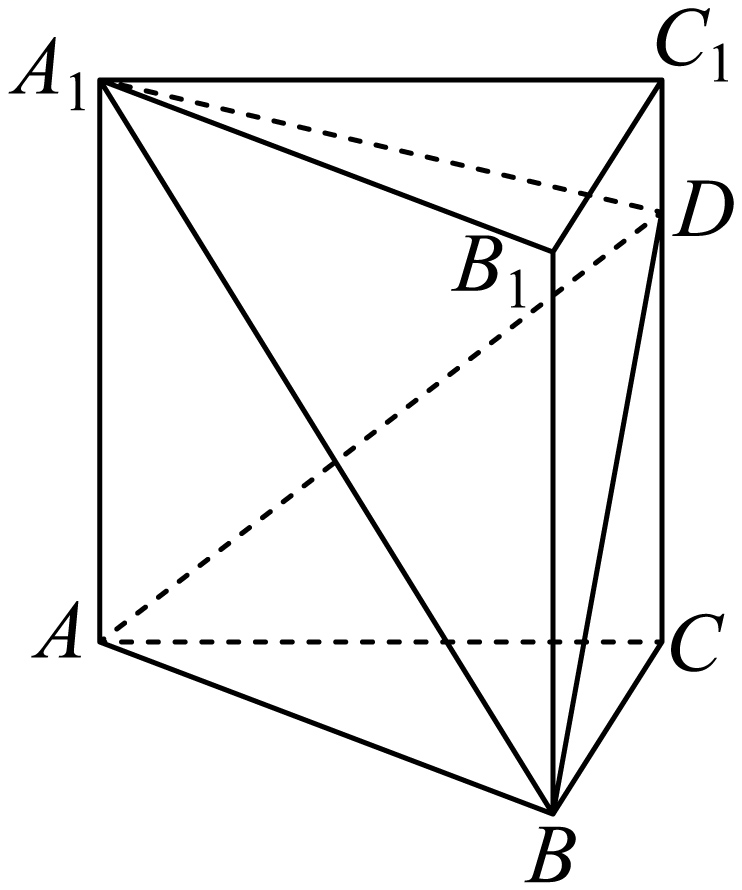
因为：，所以，故B正确；

因为，故C正确；

因为：，，故D正确.

故选：BCD

11. 如图，在正三棱柱中，是棱上任一点，则（ ）



A. 正三棱柱的表面积为

B. 三棱锥的体积为

C. 周长的最小值为

D. 三棱锥外接球的表面积最小值为

【答案】ABD

【解析】

【分析】对于A,直接求表面积即可；对于B,利用求解即可；对于C，根据侧面展开图即可求得最小值；对于D，当点位于的中点时，外接球表面积最小，求解即可.

【详解】对于A,正三棱柱中，，

所以正三棱柱的表面积为，

故A正确；

对于B，过点作,交于,则为的中点，

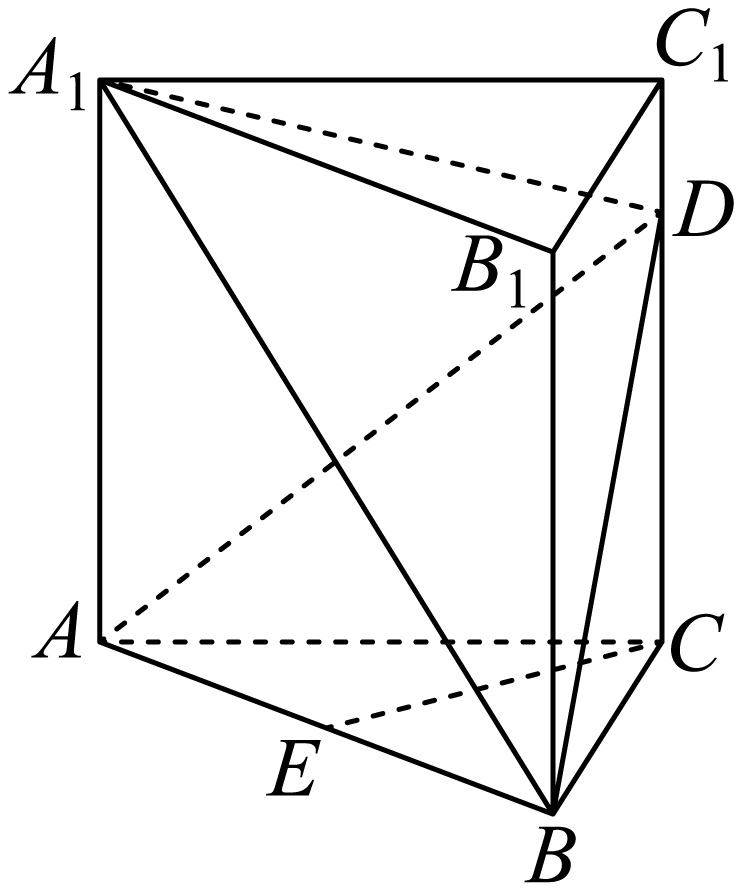
依题可知平面平面,

且平面平面,

又平面，则平面，

则为点到平面的距离，

正三角形中，可求得,



又因为是棱上任一点,且平面，

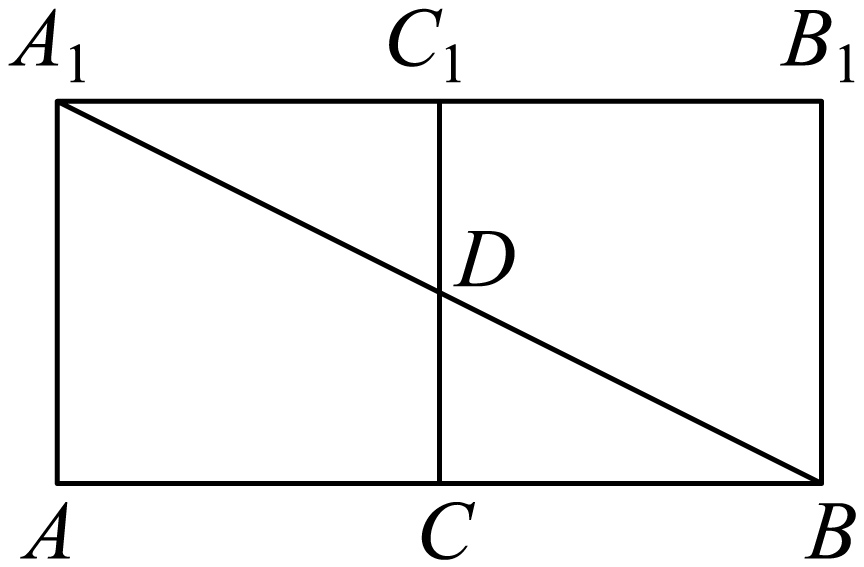
所以点到平面的距离等于点到平面的距离，

设点到平面的距离为，则，

则，

故B正确；

对于C，



由侧面展开图所示，

周长

,

所以其最小值为，

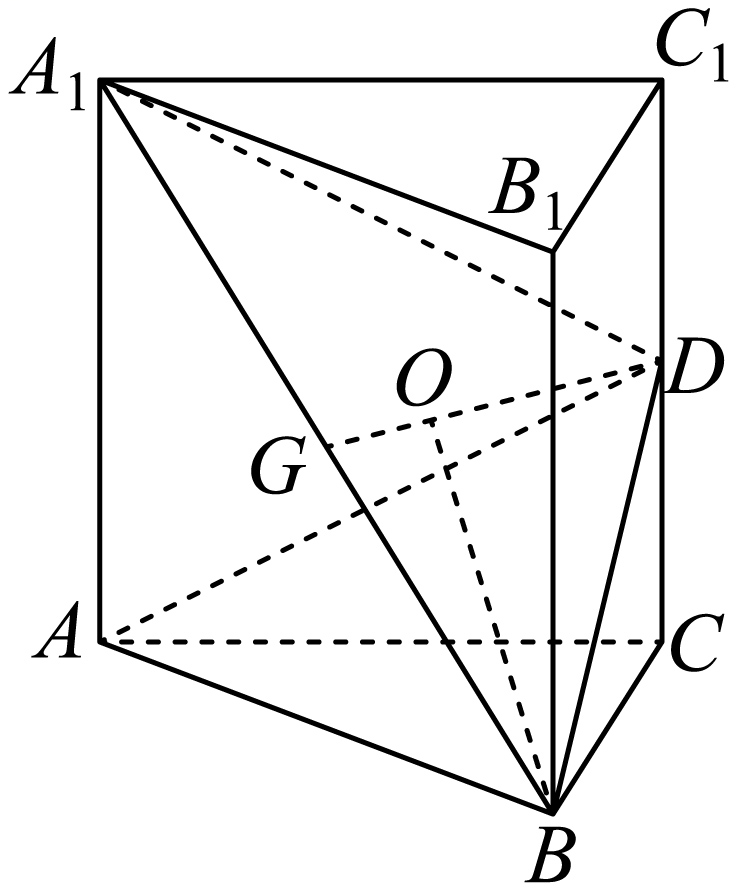
故C错误；

对于D,依题知，三棱锥外接球与四棱锥重合，

半径设为, 球心设为,为的中点，

则,

且平面,



所以当与球外切时，球的半径最小，

此时，点位于的中点，

如图所示:,

则,

解得，表面积为,

故D正确，

故选:ABD.

12. 已知定义在上的连续函数，其导函数为，且，函数为奇函数，当时，，则（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】ABD

【解析】

【分析】A项，根据是奇函数得出函数的奇偶性，进而得出函数的对称轴，即可求出；B项，构造函数，通过求导得出当时的单调性，即可得出结论；C项，求出的单调性，即可得出结论；D项，利用导数证得与的差大于与的差，结合的对称性与单调性即可得出结论.

【详解】A项，在中，，函数为奇函数，

所以函数为偶函数，则，

所以函数关于对称，

所以，故A正确；

B项，令，

因为当时，

所以当时，，函数单调递增，

所以，

所以，B正确；

C项，当时，，

所以，函数单调递增，

所以当时，函数单调递减，

则在取得最小值为1，

所以不存在，C错误；

D项，由函数关于对称，

当时，令，，函数单调递增，

所以，则，

所以，，

令，，

所以函数单调递减，，

所以，

所以，，

所以与的差大于与的差，

因为函数关于对称，当时，函数单调递增，

所以，D正确；

故选：ABD.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是由导数为奇函数，得到原函数为偶函数，从而得解.

**三､填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 曲线在点处的切线方程为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】通过求导得出在点的切线斜率，即可求出在点处的切线方程.

【详解】由题意，

在中，，

当时，，

∴在点处的切线方程为：，

即：，

故答案为：.

14. 已知等差数列的前项和为，若，，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据等差数列的性质和基本量的计算求值.

【详解】因为，，

所以，即，所以.

所以.

故答案：.

15. 已知圆锥的顶点为，底面圆心为为底面直径，，点为底面圆周上的一个动点，当的面积取得最大值时，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【解析】

【分析】设，表示面积，易知，借助余弦定理计算即可.

【详解】设，则的面积

要使的面积取得最大值，则，

所以，

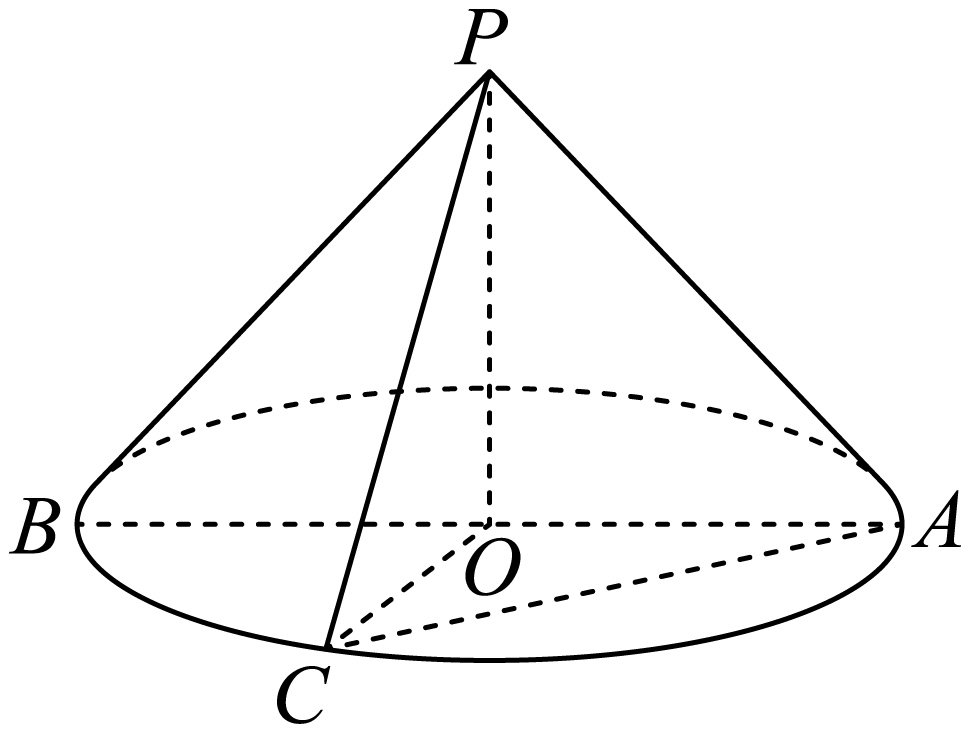
在中由余弦定理可得： ，

所以,易得,

在中，,

所以.

故答案为：.



16. 为坐标原点，为抛物线的焦点，过上的动点（不为原点）作的切线，作于点，直线与交于点，点，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

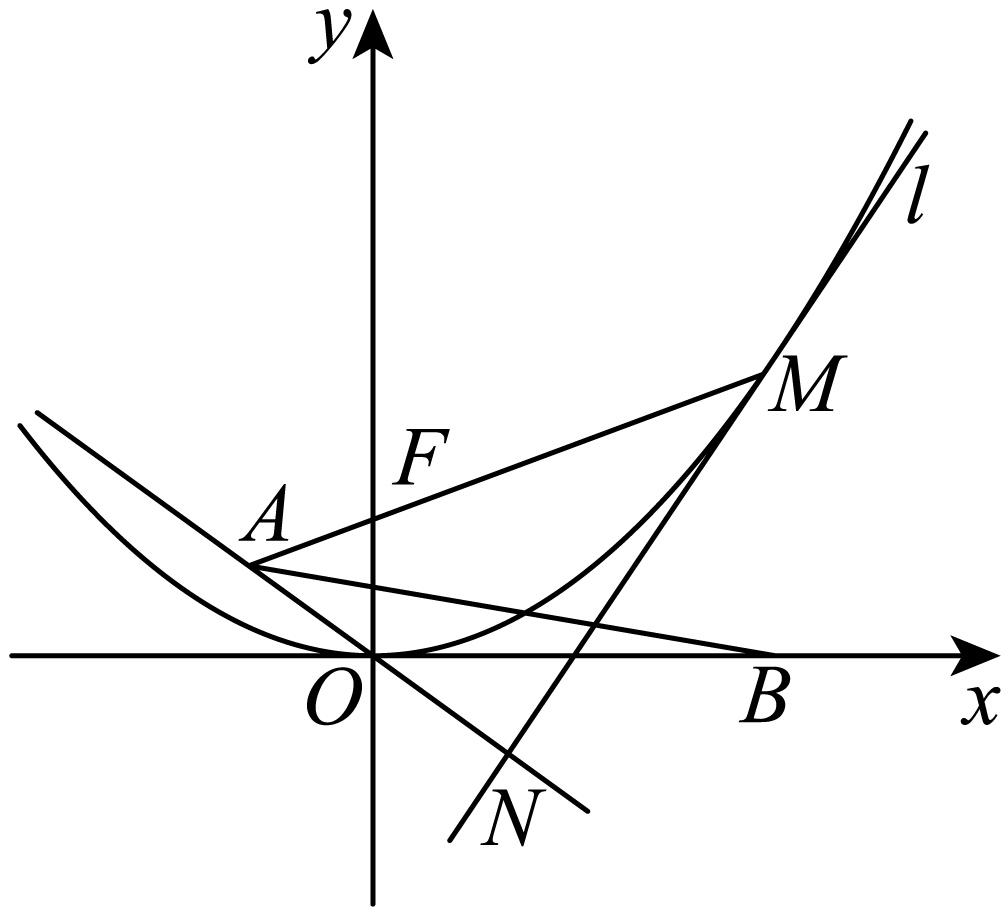
【解析】

【分析】设，，切线方程为，联立抛物线方程，由根的判别式为0得到，从而得到直线和直线的方程，联立得到，结合，求出点的轨迹方程为，且，数形结合得到的最值，得到取值范围.

【详解】由题意得，设，，

设切线方程为，联立得，

，由得，，



则直线的斜率为，直线的方程为，

直线的方程为，即，

联立与得，

其中当时，，当时，，

解得，则，

由于，则，

将代入中得，，

整理可得，即，

故点的轨迹方程为，且，

点的轨迹为以为圆心，半径为2的圆（去掉两个点），

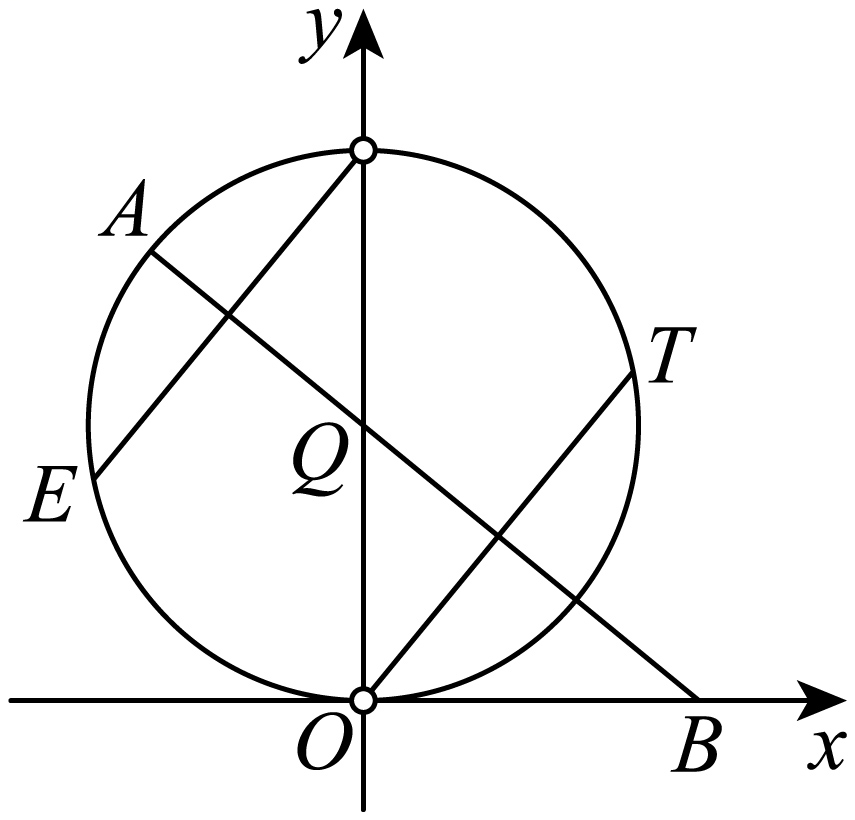
连接，则为的最大值，为的最小值，

最大值为，

最小值为，

且由对称性可得，两点与的距离等于到的距离相等，

综上，的取值范围为.



故答案为：

【点睛】方法点睛：求轨迹方程常用的方法：直接法，相关点法，交轨法，定义法，求解过程中要注意一些轨迹问题中包含隐含条件，也就是曲线上的点的坐标的取值范围，有时还要补充特殊点的坐标.

**四､解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明､证明过程或演算步骤.**

17. 已知数列中，.

（1）求；

（2）设，求证：.

【答案】（1）

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用构造等比数列的方法求出通项公式作答.

（2）由（1）及已知，利用裂项相消法求和即得.

【小问1详解】

由题意，得，故为常数列.

，故.

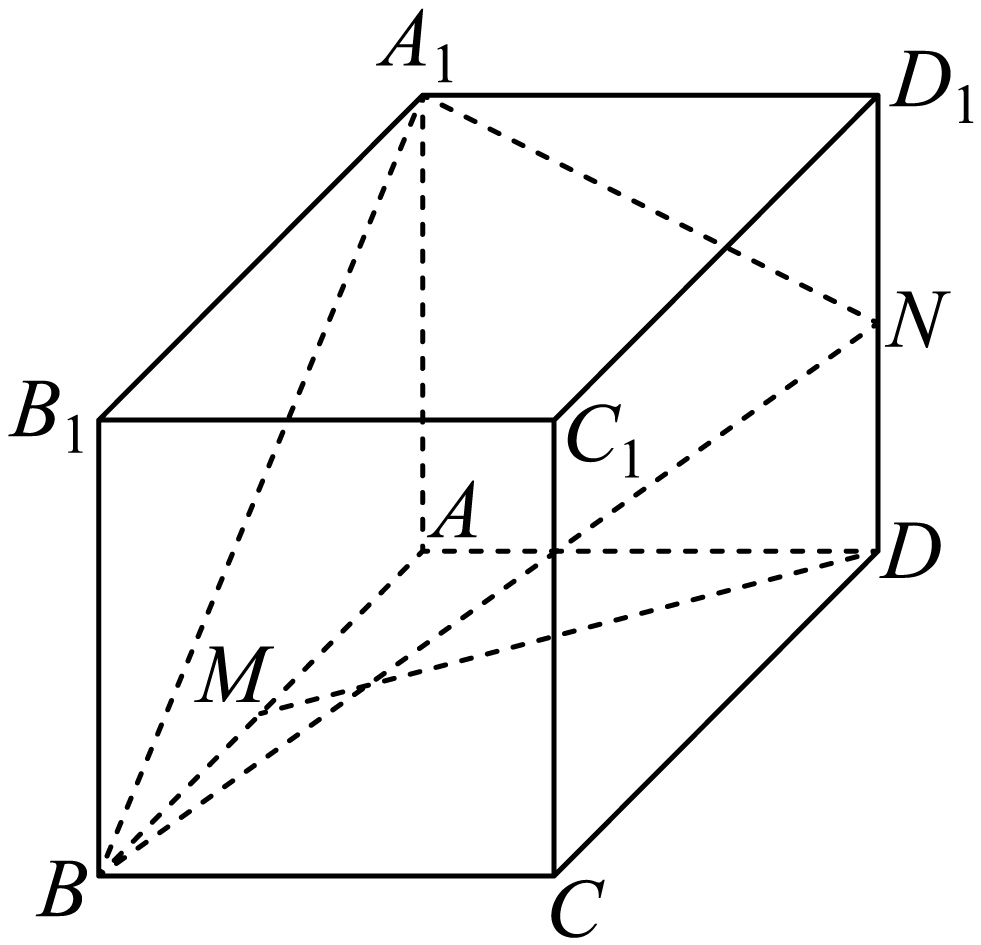
【小问2详解】



故



18. 如图，直四棱柱的底面为平行四边形，分别为的中点.



（1）证明：平面；

（2）若底面为矩形，，异面直线与所成角的余弦值为，求到平面的距离.

【答案】（1）证明见解析

（2）.

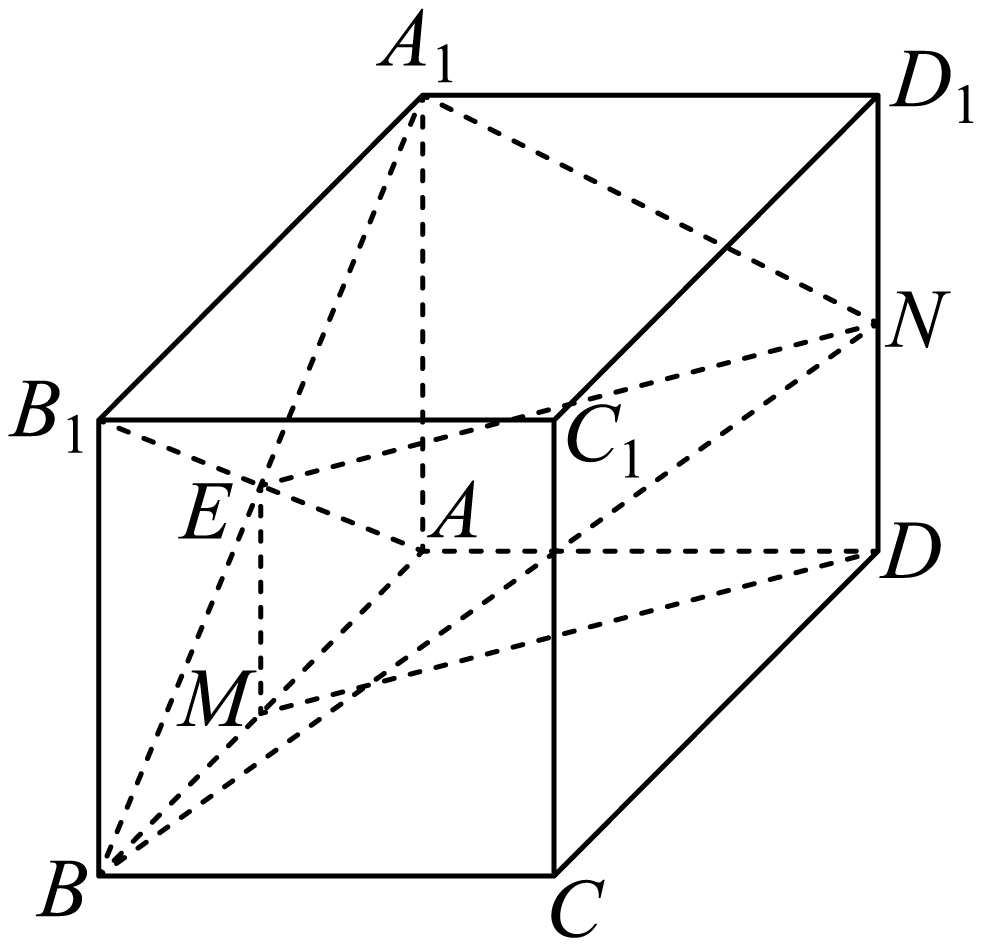
【解析】

【分析】（1）通过证明平行于面内的一条直线，即可证明平面；

（2）建立空间直角坐标系，设出的长并表达出各点坐标，利用异面直线与所成角的余弦值得出，求出平面的一个法向量，即可得出到平面的距离.

【小问1详解】

连接，交于点，连接，



则为的中点，

因为为的中点，所以，且，

因为为的中点，所以，

所以，且，

所以四边形为平行四边形，

所以，

又因为平面平面，

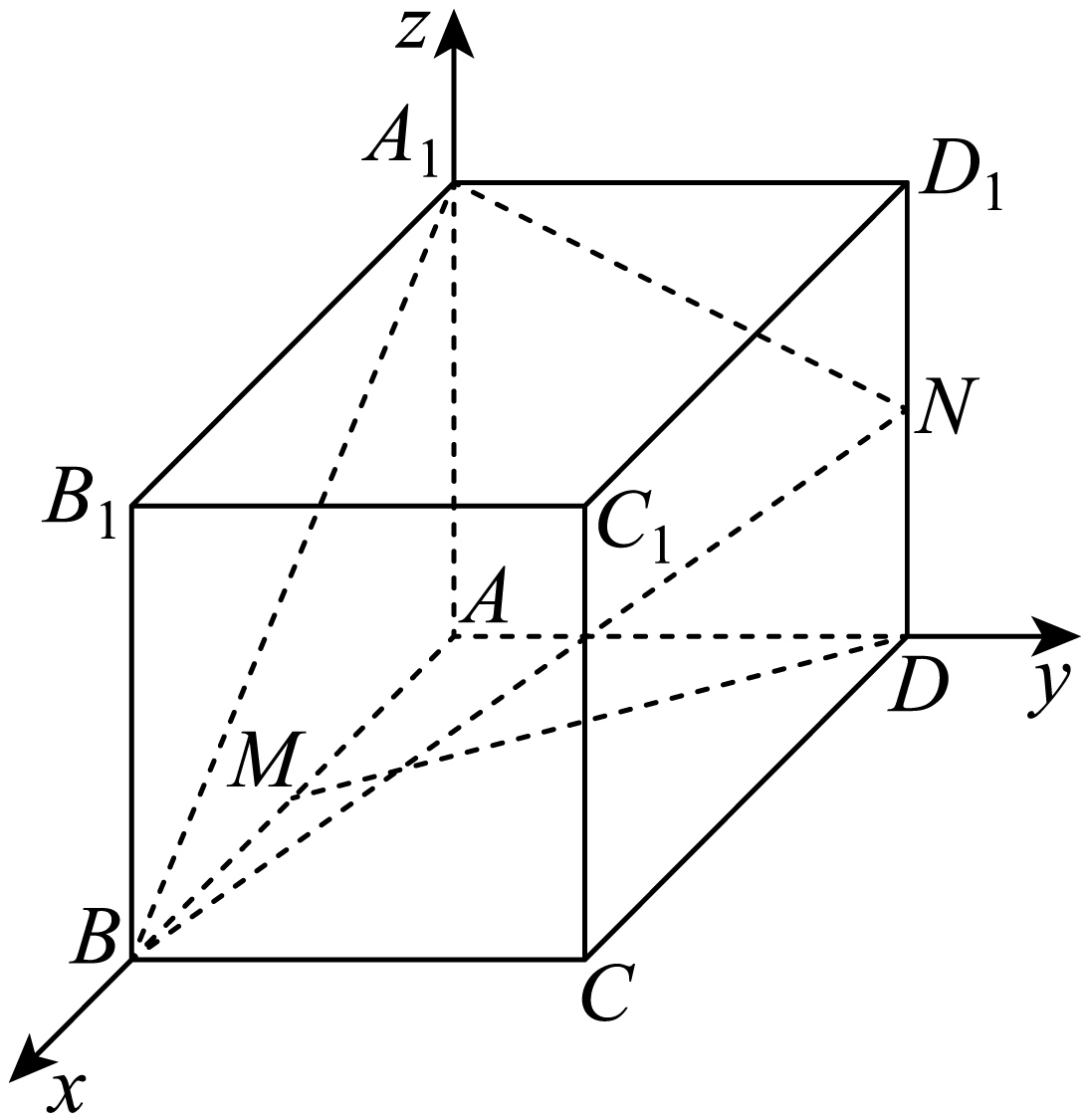
所以平面.

【小问2详解】

由题意（1）及几何知识得，

在直四棱柱中，，

两两垂直，以为坐标原点，分别以所在直线为轴､轴､轴建立如图所示的空间直角坐标系.



设，则，，

.

设异面直线与所成角为，则

，

解得：，

故，

则

设平面一个法向量为，

到平面的距离为.

所以即取，

得.

所以，

即到平面的距离为.

19. 现有甲，乙两个训练场地可供某滑雪运动员选择使用.已知该运动员选择甲，乙场地的规律是：第一次随机选择一个场地进行训练.若前一次选择甲场地，那么下次选择甲场地的概率为；若前一次选择乙场地，那么下次选择甲场地的概率为.

（1）设该运动员前两次训练选择甲场地次数为，求；

（2）若该运动员第二次训练选了甲场地，试分析该运动员第一次去哪个场地的可能性更大，并说明理由.

【答案】（1）

（2）该运动员第一次选择甲场地的可能性更大，理由见解析

【解析】

【分析】（1）由题意可知，，根据随机变量的意义，结合条件概率，求解随机变量对应的概率，再求期望；

（2）首先根据全概率公式求，再根据条件概率求和 ，即可判断.

【小问1详解】

设“第次去甲场地训练”，“第次去乙场地训练”，.

则与对立，.

依题意，.









.

所以.

【小问2详解】

第一次选择甲场地的概率更大.理由如下：





所以，

.

因为，所以该运动员第一次选择甲场地的可能性更大.

20. 在中，角所对的边分别为.若.

（1）求；

（2）若为锐角三角形，求的取值范围.

【答案】（1）；

（2）.

【解析】

分析】（1）利用边化角及三角恒等变换公式整理计算即可;

（2）通过角的转化，借助三角恒等变换公式，得到，利用

的范围，即可求出结果.

【小问1详解】

因为，整理得

，

所以，

由正弦定理得：，

因为，所以，所以.

【小问2详解】

因为为锐角三角形，，所以，且，

所以，

解法



，

因为，所以，

所以，

即的取值范围是.

解法

，

因为，所以，得，

所以，

即的取值范围是.

21. 已知函数.

（1）若是增函数，求的取值范围；

（2）若有两个极值点，且恒成立，求实数的取值范围.

【答案】（1）

（2）.

【解析】

【分析】（1）由题意可得在上恒成立，设，分、讨论求出即可.

（2）由有两个极值点为，可得方程在上有两个不同的根，则，求出的取值范围，将题意转化为恒成立，设，对求导，求出的最大值即可求出答案.

【小问1详解】

由题意.

因为函数在其定义域上单调递增，

所以.

设，

①当时，函数在上单调递增，只须，无解.

②当时，只须，解得：，

综上所述：实数的取值范围是.

【小问2详解】

由（1）知，

因为有两个极值点为，

所以在上有两个不同的根，

此时方程在上有两个不同的根.

则，且，

解得.

若不等式恒成立，

则恒成立.

因为







设.

则，因为，所以，

所以在上递减，所以，

所以，

即实数的取值范围为.

【点睛】方法点睛：对于利用导数研究不等式的恒成立与有解问题的求解策略：

1、通常要构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，从而求出参数的取值范围；

2、利用可分离变量，构造新函数，直接把问题转化为函数的最值问题．

3、根据恒成立或有解求解参数的取值时，一般涉及分离参数法，但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况，进行求解，若参变分离不易求解问题，就要考虑利用分类讨论法和放缩法，注意恒成立与存在性问题的区别．

22. 已知双曲线的渐近线方程为，过右焦点且斜率为的直线与相交于两点.

（1）求的方程；

（2）①若点关于轴的对称点为，求证直线恒过定点，并求出点的坐标；

②若，求面积的最大值.

【答案】（1）

（2）①证明见解析，；②

【解析】

【分析】（1）根据已知条件确定，的值，求出双曲线的标准方程；

（2）设直线的点斜式方程，结合对称性得到直线的方程，结合直线方程，确定直线过定点；然后把的面积表示为的函数，再利用导数分析函数的单调性，求函数的最大值.

【小问1详解】

设双曲线的方程为，

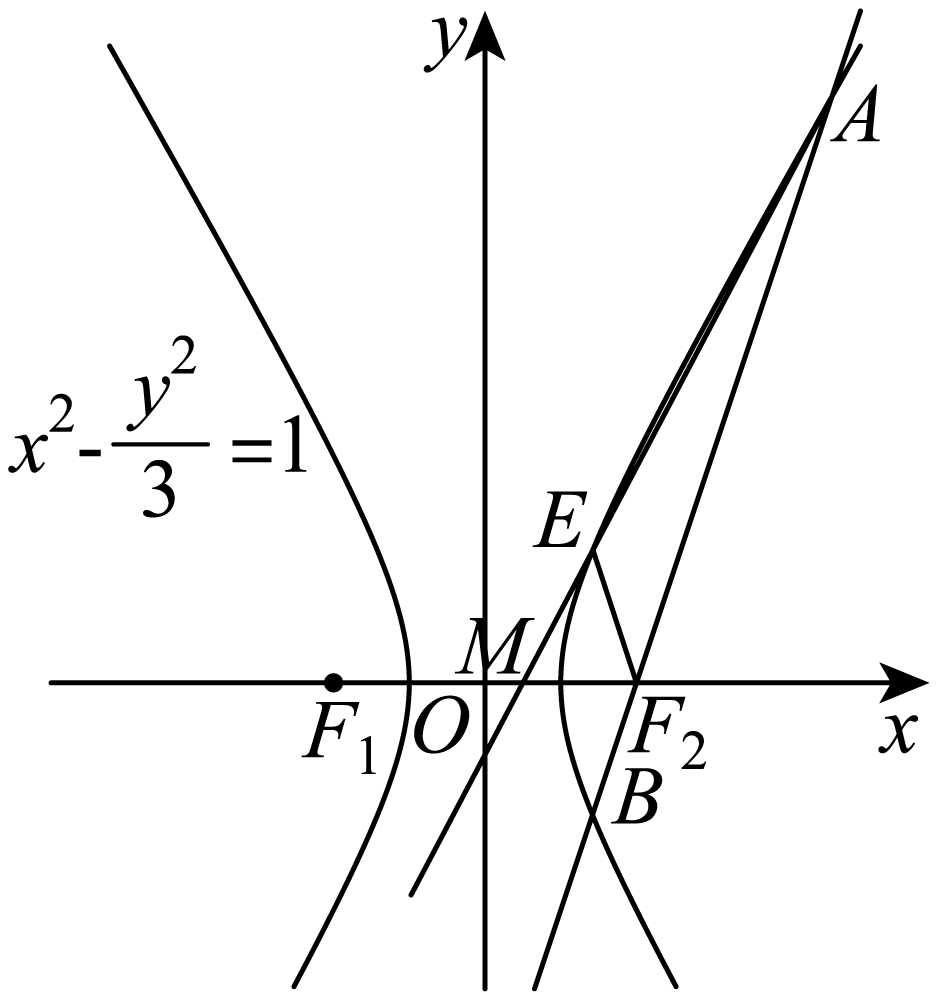
由题意知，

解得，

所以的方程为.

【小问2详解】

如图：



①直线的方程为，设，则.

由，消得：.

所以.

所以

直线的方程为，

即











所以直线恒过定点.

②时，











令

所以

所以，在上单调递减

所以，

所以的最大值为，此时.

【点睛】方法点睛：在圆锥曲线部分，涉及最值问题，通常有以下思路解决：

（1）转化为二次函数的值域问题求解；

（2）利用基本（均值）不等式求最值；

（3）转化为三角函数，利用三角函数的有界性求最值；

（4）求导，分析函数的单调性求最值.